

1^o CONDUCTION DE LA CHALEUR DANS UN CABLE ELECTRIQUE

Un câble en cuivre homogène de section circulaire, de rayon a (5 mm), de longueur L (1m) et de section S , est parcouru par un courant I de 500 A. Le cuivre possède :

- Une résistivité électrique $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$
- Une conductivité thermique $\lambda_C = 418 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

On rappelle que la résistance électrique totale du câble est telle que : $R = \rho \frac{L}{S}$

A) ASPECT ELECTRIQUE

1. Déterminer la valeur de la résistance électrique R (Ω) du câble par unité de longueur ainsi que la puissance électrique dissipée P (W). Calculer la valeur de la densité de courant J_{tot} ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$).
2. On va montrer que la puissance ne se répartie pas uniformément dans le câble. A cet effet, on considère, une portion du câble de rayon r ($0 < r \leq a$) et de longueur L . Selon le principe de la conservation de la densité de courant, la densité de courant $J(r)$ dans cette portion, doit être égale à J_{tot} .

Montrer que la puissance $P(r)$ dissipée dans le câble est telle que :

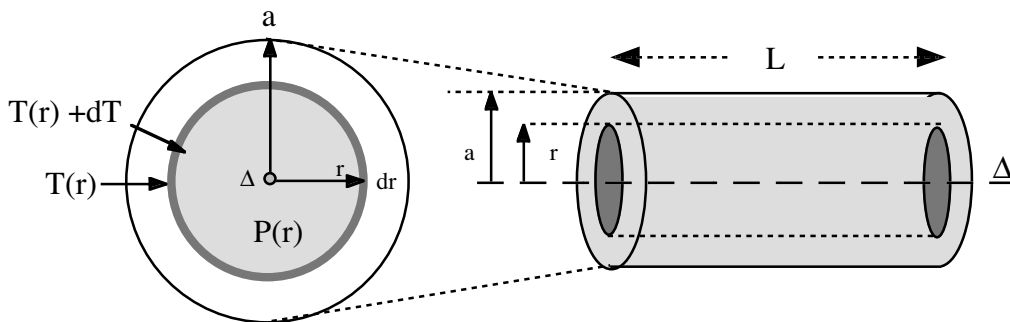
$$P(r) = k r^2 \quad \text{où} \quad k = \rho \frac{L I^2}{\pi a^4}$$

Tracer le graphe correspondant.

B) ASPECT THERMIQUE

On s'intéresse maintenant à la répartition de la température dans le câble, résultat de la puissance qui s'établit dans le câble de section totale S et de longueur L .

On considère alors un cylindre de rayon $r < a$, d'épaisseur dr et de surface $S_L(r)$ où se développe la puissance $P(r)$.



1. En exploitant la loi de Fourier, déterminer l'expression du flux de chaleur $\Phi(r)$ sortant du cylindre considéré. Quelle est la relation entre $\Phi(r)$ et $P(r)$?
2. Montrer que la loi de répartition de la température $T(r)$ à l'intérieur du câble est telle que :

$$T(r) = -\frac{k}{4\pi\lambda L} r^2 + Cte$$

Calculer l'écart température ΔT_C qui règne dans le câble entre son axe Δ et sa surface ($r = a$).

3. Dans les mêmes conditions, que se passerait-il si on utilisait du graphite ($\rho = 6000 \mu\Omega \cdot \text{cm}$, $\lambda = 17 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$)?

On isole maintenant le conducteur en cuivre avec du caoutchouc :

- épaisseur $e = 1 \text{ cm}$
- $\lambda_i = 0,13 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$
- La température T_S de la surface externe du dispositif est de $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

4. Quel est le flux de chaleur (W) qui traverse la gaine isolante? En exploitant à nouveau la loi de Fourier, déterminer l'expression de l'évolution $T_i(r)$ de la température dans la gaine isolante.
Tracer le graphe $T_i(r)$ pour du dispositif.
5. En utilisant la notion de résistance thermique R_{th} , donner le schéma de simulation thermique équivalent au dispositif. Calculer la température de la surface du câble électrique.

CORRECTION

A) ASPECT ELECTRIQUE

1. $R = 2,165 \cdot 10^{-4} \Omega$ Puissance : $P = 54,11 \text{ W}$

Densité de courant : $J_{\text{tot}} = \frac{I}{\pi a^2} = 6,366 \text{ A.m}^{-2}$.

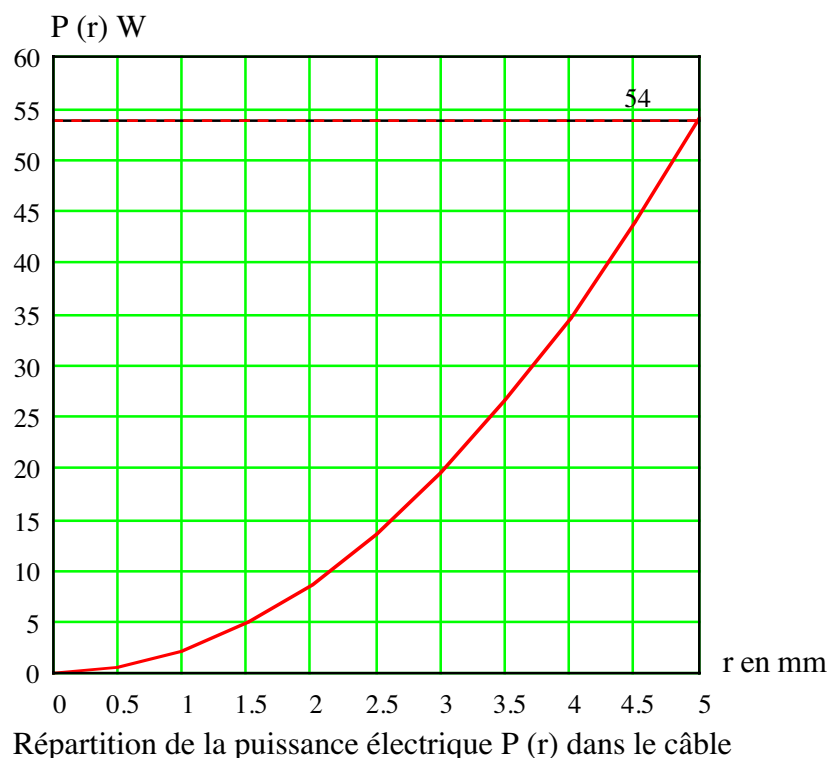
2. Calculons la puissance dissipée dans la portion de câble de rayon r :

$$P(r) = \left[\rho \frac{L}{\pi r^2} \right] [J(r) \pi r^2]^2$$

Où $J(r)$ représente la densité de courant et (πr^2) la surface.

Sachant que $J(r) = J_{\text{tot}}$ selon le principe de la conservation de la densité de courant, il vient :

$$P(r) = k r^2 \quad \text{où } k = \rho \frac{L I^2}{\pi a^4} \quad (1)$$



B) ASPECT THERMIQUE

1. La loi de Fourier permet de déterminer l'expression du flux de chaleur $\Phi(r)$ sortant du cylindre considéré :

$$\Phi(r) = -\lambda S_L \frac{dT(r)}{dr} \quad (2)$$

Où S_L représente la surface latérale du cylindre : $S_L = 2\pi r L$.

On a évidemment $\Phi(r) = P(r) = k r^2$.

2. L'égalité des relations (1) et (2) conduit à une équation différentielle du premier ordre :

$$dT(r) = -\frac{k}{2\pi\lambda L} r dr \quad \text{Soit : } T(r) = -\frac{k}{2\pi\lambda L} r^2 + Cte$$

Il n'est pas possible physiquement avec nos données de calculer la constante. On peut cependant déterminer l'écart de température :

$$\Delta T_c = -\frac{k}{2\pi\lambda L} [r^2]_0^a$$

$$\Delta T_c = \frac{\rho I^2}{4\pi^2 \lambda} = 10^{-3} \text{°C}$$

Ecart de température très faible.

3. Pour le graphite (exemple les charbons d'un démarreur de voiture) : $\Delta T_c = \frac{\rho I^2}{4\pi^2 \lambda} = 894 \text{°C} !$

4. La puissance P (54 W) doit traverser la gaine isolante. La loi de Fourier devient alors :

$$P = -\lambda_i S_L \frac{dT_i(r)}{dr}$$

Avec : $S_L = 2\pi r L$

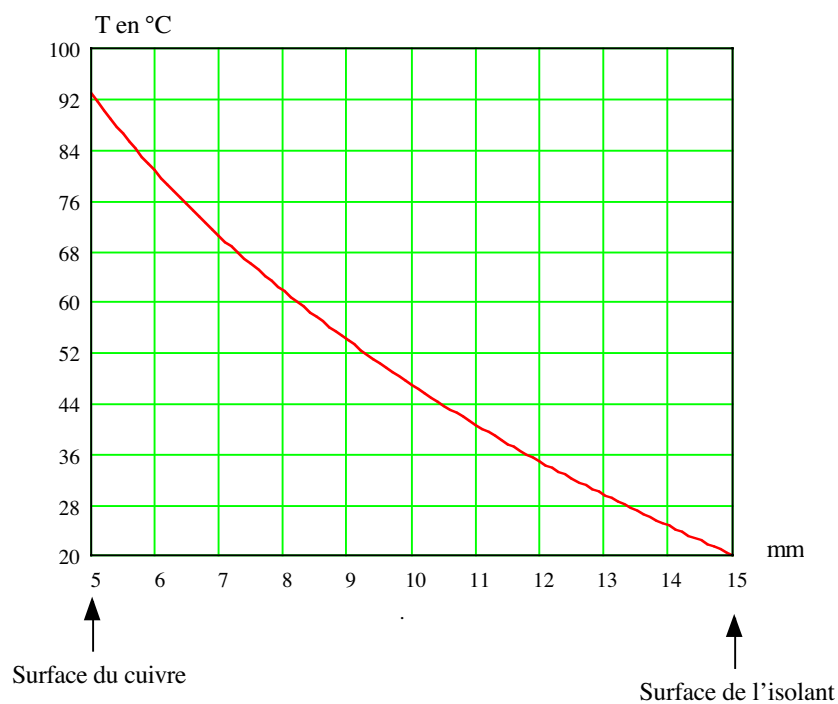
On obtient l'équation différentielle : $dT_i(r) = -\frac{P}{2\pi\lambda_i L} \frac{dr}{r}$ qui a pour solution :

$$T_i(r) = -\frac{P}{2\pi\lambda_i L} \ln(r) + Cte$$

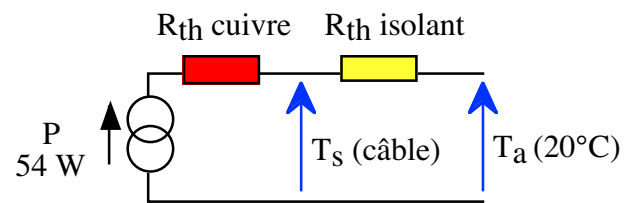
où la constante est la solution de : $T_i(r+e) = 20 \text{°C} = -\frac{P}{2\pi\lambda_i L} \ln(r+e) + Cte$

et qui conduit à un écart de température : $\Delta T_i = \frac{P}{2\pi\lambda_i L} \ln\left(1 + \frac{e}{a}\right) = 72,9 \text{°C}$

Graphes de T (r) dans l'isolant :



5. Schéma de simulation thermique équivalent au dispositif.



$$R_{th} \text{ cuivre} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ °C/W}$$

$$R_{th} \text{ isolant} = 1,35 \text{ °C/W}$$

$$T_s \text{ câble} = P (R_{th} \text{ isolant}) + T_a = 92,9 \text{ °C.}$$